OLIMPIADA DE MATEMATICA
Etapa locala – Hîrlău
18.02.2012
Clasa a VII-a

Subiectul 1

Daca $= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{2010^2}$, sa se arate ca:

a) $\frac{1}{2\cdot 3} < \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2}$

b) $\frac{1}{2\cdot 2011} < \frac{S}{2009} < \frac{1}{2010}$

Subiectul 2

a) Sa se calculeze media aritmetica si media geometrica a numerelor m si n stiind ca

$$m = \frac{1006}{2011}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+2011}\right),$$

iar n este cardinalul multimii A, unde

$$A = \left\{\overline{ab}\ /\ \sqrt{\overline{ab} + 6(a+b) + \overline{ba}} \in \mathbb{N}\right\}$$

b) Sa se demonstreze ca

$$\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{30}}{11} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \frac{\sqrt{56}}{15} + \frac{\sqrt{72}}{17} + \frac{\sqrt{90}}{19} < 4$$

Subiectul 3

Fie triunghiul ABC in care bisectoarea interioara a unghiului $\sphericalangle ABC$ intersecteaza mediatoarea laturii $[BC]$ in punctul P si formeaza cu aceasta un unghi de $60°$. Stiind ca $m(\sphericalangle PCA) = 45°$ si Q este punctul in care CP intersecteaza latura AB, sa se demonstreze ca $PM = \frac{1}{3}AQ$, unde punctual $M \in [BC], [BM] \equiv [MC]$.

Subiectul 4

Fie paralelogramul $ABCD$ si punctele $\in (AB), PC \cap BD = \{M\}, PD \cap AC = \{N\}$, $\{O\} = AC \cap BD$. Sa se demonstreze ca $\frac{OM}{MD} + \frac{ON}{NC} = \frac{1}{2}$.

Nota:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp efectiv de lucru 3 ore
- Fiecare problema se noteaza cu puncte de la 0 la 7